

齿轮轮齿接触分析的分解算法

曹雪梅^{1,2}, 杨博会¹, 邓效忠¹, 聂少武¹, 魏冰阳¹

(1. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003;
2. 重庆理工大学 汽车零部件先进制造技术教育部重点实验室, 重庆 400054)

摘 要: 提出了齿轮轮齿接触分析算法——分解算法。传统的轮齿接触分析方法求啮合点时需要求解含 5 个非线性方程的方程组,求解性差;齿面接触和边缘接触的数学模型不同,需要分别进行求解,求解过程复杂。轮齿接触分析算法——分解算法,提出了瞬时共轭啮合线的概念,可有效分离传动误差,得到啮合点、瞬时接触线,求啮合点时非线性方程的个数由 5 个减少为 2 个。分解算法建立的数学模型也适用于边缘接触分析,算法简单、有效、适应性强。以一对弧齿锥齿轮为例,对比分析了传统方法和分解算法,结果表明:齿面部分的印痕是一致的,传动误差幅值相差 0.3";边缘接触部分的印痕存在少许差异。

关 键 词: 轮齿接触分析; 边缘接触分析; 瞬时共轭啮合线; 传动误差; 齿面接触印痕
中图分类号: V323.8 **文献标志码:** A

Decomposition methodology for gear tooth contact analysis

CAO Xuemei^{1,2}, YANG Bohui¹, DEND Xiaozhong¹,
NIE Shaowu¹, WEI Bingyang¹

(1. School of Mechanical and Electronical Engineering,
Henan University of Science and Technology, Luoyang Hena 471003, China;
2. Key Laboratory of Advanced Manufacture Technology for Automobile Parts,
Ministry of Education, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: A methodology for gear tooth contact analysis was proposed. The conventional approach of tooth contact analysis was used to solve a system of five nonlinear equations for each contact point, but the numerical stability of the algorithm was weak. In addition, the mathematical models for tooth surface contact and edge contact were not the same; therefore, different systems of five nonlinear equations were required for different mathematical models, causing complex computing process and too many parameters involved therein. This decomposition methodology defined and utilized a concept called instantaneous conjugate contact curve. By constructing instantaneous conjugate contact curve, the transmission errors can be separated effectively and then the contact point and instantaneous contact curve can be located effortlessly. The number of nonlinear equations for searching contact point was reduced from 5 to 2. This mathematic model was also applied to edge contact analysis. So the decomposition methodology was simple, effective and adaptable. At the end, the decomposi-

收稿日期: 2016-01-22
基金项目: 国家自然科学基金(51675161,51475141); 汽车零部件先进制造技术教育部重点实验室开放课题(2016KLMT04);
河南省科技计划项目(172102210251)
作者简介: 曹雪梅(1970—),女,副教授、硕士生导师,博士,主要从事齿轮的设计、制造与检测技术研究。

引用格式: 曹雪梅,杨博会,邓效忠,等. 齿轮轮齿接触分析的分解算法[J]. 航空动力学报,2017,32(9):2299-2304. CAO Xuemei, YANG Bohui, DEND Xiaozhong, et al. Decomposition methodology for gear tooth contact analysis[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(9): 2299-2304.

tion methodology was applied to a pair of spiral bevel gears to demonstrate its effectiveness compared with the conventional method. For tooth surfaces contact, contact patterns were identically calculated by the two methods, and the relative difference for the magnitude of transmission errors was about 0.3%. In the case of edges contact, there were relatively few differences for patterns.

Key words: tooth contact analysis; edge tooth contact analysis;
instantaneous conjugate mesh curve; transmission error;
tooth contact pattern

目前广泛采用的轮齿接触分析方法(TCA)是 Litivin^[1]提出的基于运动与几何的分析算法。核心内容是根据啮合点接触条件(法矢相同、位矢相同)通过求解 5 个非线性方程组确定啮合点对及传动误差;根据啮合点的微观几何拓扑结构将瞬时接触曲线简化为直线。这种算法的难点在于求解 5 个非线性方程组,初值的设定是能否求解的关键,算法适应性较差;瞬时接触线计算精度低。

FAN Qi^[2-3]提出了改进算法,利用 Euler-Rodrigues 公式及法矢相同条件直接计算得到两齿轮的啮合转角,利用位矢相同和啮合方程建立非线性方程组。对于大轮成形、小轮展成加工而言该算法需要求解 4 个非线性方程组;但对于大小轮都用展成加工该算法仍需求解 5 个非线性方程组。FAN Qi 针对瞬时接触线计算精度低的问题,提出以啮合点为中心,不断扩大搜索半径,搜索瞬时接触曲线上的点,这种二维搜索算法具有较高精度,但计算过程复杂。

构造两齿面拓扑偏差^[4-7]进行齿面设计与分析是目前的研究热点。Sheveleva 等^[8]提出大小轮分别按照定传动比旋转,在参考点处建立坐标系及网格平面,网格平面在参考点处与齿面相切,通过网格平面寻找两齿面间的对应点,距离最小的点对即为啮合点对。文献[9]提出的方法基于齿面离散点,通过建立大轮、小轮基准面,计算大小轮实测齿面与其基准面的形状偏差,基于瞬时接触线构造合成误差曲面分析印痕。文献[10-11]建立与小轮齿面完全共轲的大轮齿面作为基准面,构造大轮理论齿面与基准面的差齿面,在差齿面上划分网格节点,根据映射关系插值计算瞬时啮合线上的离散点进而计算传动误差与齿面印痕。这些算法为轮齿接触分析提供了思路,但所构造的两齿面拓扑偏差皆采用离散齿面的形式(网格点偏差),需要再通过插值和拟合等形式实现传动误差和瞬时接触线计算,算法复杂。

齿轮副在传递运动过程中会发生一个齿轮的齿顶边缘和另一齿轮的齿面啮合继续传递运动的现象,称为边缘接触(ETCA)^[12-13]。目前仅有文献[12-13]对边缘接触分析方法进行了论述。边缘接触与齿面接触分析数学模型不统一,特别是在计算边缘瞬时接触线时,需要采用搜索算法,分析与计算更为复杂。

本文针对目前轮齿接触分析求解性差、计算量大且齿面接触分析与边缘接触分析数学模型不统一等问题,提出了轮齿接触分析算法——分解算法。通过定义瞬时共轲啮合线,有效分离传动误差,得到啮合点、瞬时接触线,求啮合点时非线性方程的个数减少为 2 个,并且也可用于边缘接触分析。

1 分解法基本原理

- 1) 根据大轮和小轮的齿面加工参数计算大轮齿面 Σ_2 和小轮齿面 Σ_1 ;
- 2) 依据啮合方程,构造与大轮齿面 Σ_2 完全共轲的小轮齿面 Σ_0 作为基准齿面;
- 3) 对应每个小轮啮合转角 φ_1 求出小轮齿面 Σ_1 上的瞬时共轲啮合线 Γ_1 及小轮基准齿面 Σ_0 上的瞬时共轲啮合线 Γ_0 ;
- 4) 对啮合线 Γ_1 离散化,根据映射关系求出啮合线 Γ_0 上的相应离散点,两条瞬时共轲啮合线间的最短距离即为分离出的传动误差分量,对应的点即为啮合点;
- 5) 分离出传动误差后,两啮合线间的距离等于红丹粉涂层厚度时,分离出的啮合线的长度即为瞬时接触线。

2 轮齿接触分析分解法

本文以螺旋锥齿轮为例对轮齿接触分析的分解法进行论述,其他类型的齿轮副可看作是其特例。

2.1 构造小轮基准齿面 Σ_0 和小轮齿面 Σ_1

基于微分几何和空间啮合理论, 根据大轮齿面加工参数得到大轮齿面 Σ_2 方程的表达式^[14-15]

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(u_g, v_g) \tag{1}$$

式中 u_g, v_g 是大轮齿面参数。

建立大小轮啮合坐标系, 如图 1 所示。 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 为小轮动坐标系, 与小轮固连, X_1 为小轮旋转轴, 角速度为 $\mathbf{w}^{(1)}$ 。 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 为大轮动坐标系, 与大轮固连, X_2 为大轮旋转轴, 角速度为 $\mathbf{w}^{(2)}$ 。 O_1, O_2 分别为小轮、大轮设计交叉点, Ω 为轴交角, E 为偏置距。固定坐标系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h), S_d(X_d, Y_d, Z_d)$ 固连于齿轮箱体中, 在初始位置, S_1 与 S_h 重合, φ_1 为小轮当前啮合转角; S_2 与 S_d 重合, φ_2 为大轮当前啮合转角。

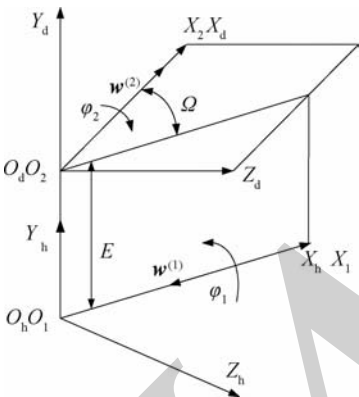


图 1 齿轮啮合坐标系

Fig. 1 Coordinate systems of gear mesh

将大轮齿面点的位矢从坐标系 S_2 转换到坐标系 S_1 中

$$\mathbf{r}_0(\varphi_1, \varphi_2, u_g, v_g) = M_{1h}(\varphi_1)M_{hd}M_{d2}(\varphi_2)\mathbf{r}_2(u_g, v_g) \tag{2}$$

小轮基准齿面与大轮齿面啮合时完全共轲, 传动比等于齿轮副的名义传动比, 则大轮啮合转角 φ_2 和小轮啮合转角 φ_1 的关系

$$\varphi_2 = \frac{z_1}{z_2}(\varphi_1 - \varphi_1^0) + \varphi_2^0 \tag{3}$$

式中 φ_2^0, φ_1^0 为设计参考点处的大、小轮啮合转角。

两个齿面啮合时应满足啮合方程

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{12} = f(u_g, v_g, \varphi_2) = 0 \tag{4}$$

根据大、小轮啮合转角关系及啮合方程(4)可解出在小轮基准齿面 Σ_0 上点的位矢 $\mathbf{r}_0(u_g, v_g)$ 及法矢 $\mathbf{n}_0(u_g, v_g)$, 该齿面与大轮齿面完全共轲——传动误差为零且啮合时为线接触。

根据小轮齿面加工参数计算得到小轮齿面

Σ_1 在坐标系 S_1 中位矢^[14-15]

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u_p, v_p) \tag{5}$$

式中 u_p, v_p 是小轮齿面参数。

2.2 构造小轮齿面 Σ_1 与小轮基准齿面 Σ_0 上

瞬时共轲啮合线 Γ_1 和 Γ_0

瞬时共轲啮合线定义为: 在任一瞬时, 对应为小轮啮合转角 φ_1 , 小轮齿面与其完全共轲的大轮齿面啮合时的啮合线。

小轮齿面上的瞬时共轲啮合线 Γ_1 应满足啮合方程

$$f_1(u_p, v_p, \varphi_1) = \mathbf{n}_h^1 \cdot \mathbf{v}_h^{12} = 0 \tag{6}$$

式中 $\mathbf{n}_h^1$ 为固定坐标系 S_h 中小轮齿面点的法矢, $\mathbf{v}_h^{12}$ 为固定坐标系 S_h 中齿面接触点的相对速度。

$$\mathbf{v}_h^{12} = (\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}) \times \mathbf{r}_h^1 - \mathbf{w}^{(2)} \times \mathbf{R}_h \tag{7}$$

$$\mathbf{w}^{(1)} = [-1 \ 0 \ 0]^T \tag{8}$$

$$\mathbf{w}^{(2)} = \frac{z_1}{z_2} [\cos \Omega \ 0 \ -\sin \Omega] \tag{9}$$

$$\mathbf{R}_h = [0 \ -E \ 0] \tag{10}$$

根据方程式(6)及小轮齿面方程式(5)即可求出小轮齿面 Σ_1 上任一小轮啮合转角 φ_1 对应的瞬时啮合线 Γ_1 。同理, 根据小轮基准齿面 Σ_0 方程式(2)及其啮合方程可求出同一啮合转角 φ_1 下对应的瞬时共轲啮合线 Γ_0 , 如图 2 所示。

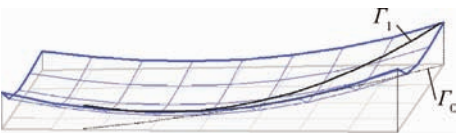


图 2 瞬时共轲啮合线

Fig. 2 Instantaneous conjugate mesh curve

2.3 分解啮合点与传动误差

图 3 所示为某一啮合瞬时(小轮啮合转角为 φ_1^i 时)小轮齿面上的瞬时共轲啮合线 Γ_1 及相应的小轮基准齿面上的瞬时共轲啮合线 Γ_0 。由方程式(6)及方程式(5)确定的小轮齿面瞬时共轲啮合

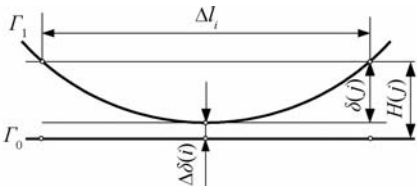


图 3 啮合点与瞬时啮合线

Fig. 3 Mesh point and instantaneous mesh curve

线可表示为 $\Gamma_1(u_p)$ 。根据曲线参数对 Γ_1 离散化得到一系列的离散点,再通过投影关系,求出小轮基准齿面上的瞬时共轭啮合线 Γ_0 上对应的离散点。 $H(j)$ 为 Γ_1 与 Γ_0 间第 j 个离散点对的距离, Γ_1 与 Γ_0 间最小距离 $\Delta\delta(i)$ 为

$$\Delta\delta(i) = \min H(j) \quad j = 1, \cdots, n \quad (11)$$

式中 n 为瞬时共轭啮合线上划分的离散点的个数。

$\Delta\delta(i)$ 即为小轮啮合转角为 φ_1^i 时的传动误差,对应的离散点对即为啮合点对。根据啮合点的瞬时接触半径,可将传动误差从距离偏差转化为角度偏差

$$T_{e(i)} = \frac{\Delta\delta(i)}{(-z_{1m}n_{y1m} + y_{1m}n_{z1m})} \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad (12)$$

2.4 计算瞬时接触曲线的两端点

沿 Γ_1 线在啮合点的两端分别寻找瞬时接触线两端点

$$\delta(j) = H(j) - \Delta\delta(i) \quad (13)$$

当离散点对的 $\delta(j) \approx 0.00635\text{ mm}$ 时,瞬时共轭啮合线 Γ_1 上对应的离散点确定为小轮齿面上瞬时接触曲线端点;将端点坐标变换到大轮动坐标系中,即可确定大轮齿面上瞬时接触曲线端点。

2.5 边缘接触分析(ETCA)

目前采用的边缘接触分析方法计算边缘啮合点时需要根据边缘接触几何条件^[12-13]求解 5 个非线性方程组。边缘瞬时接触线采用数值方法进行搜索。即以边缘啮合点为中心,在其切平面上根据给定的搜索半径 Δr ,在齿面范围内以一定步长变换搜索角 ϵ 搜索两齿面对应的点对,并计算点对间的距离,距离最小的确认为瞬时接触线上的点。按一定步长增大搜索半径,当点对距离等于红丹粉涂层厚度(0.00635 mm)时,即为瞬时接触线的端点。

分解法建立的齿面接触数学模型也适用于边缘接触分析。瞬时接触线通过瞬时共轭啮合线确定,计算两瞬时共轭啮合线间距离最小的离散点对,若最小距离点对中的任一个点在齿顶时即为边缘接触。分解算法与传统的边缘接触分析算法相比,更加简洁。

3 算例分析

用该方法对一对弧齿锥齿轮进行分析,轮坯参数见表 1,大轮小轮加工参数见表 2。

表 1 轮坯参数
Table 1 parameter of blank

参数	小轮	大轮
齿数 z	20	86
模数 m/mm	4.25	
中点螺旋角 $\beta/(\circ)$	25	
螺旋方向	左旋	右旋
轴交角 $\Gamma/(\circ)$	51.152	
分锥角 $\gamma_o/(\circ)$	10.117	41.033
顶锥角 $\gamma_t/(\circ)$	10.950	41.400
根锥角 $\gamma_r/(\circ)$	9.752	40.201
外锥距 A_w/mm	278.341	
齿宽 b_w/mm	43	
齿顶高 h_a/mm	4.89	2.11
齿根高 h_f/mm	2.91	5.69
齿顶隙 h_c/mm	0.80	0.80

表 2 大轮、小轮加工参数
Table 2 Machining parameters of gear and pinion

参数	大轮凸面	小轮凹面
刀尖半径 r_p/mm	150.6855	158.687
刀具齿形角 $\alpha/(\circ)$	21	18
径向刀位 S_r/mm	236.892	253.941
角向刀位 $q/(\circ)$	35.665	35.939
滚比 m_p	1.523	6.219
垂直轮位 E_m/mm	0	0
轴向轮位 X_g/mm	0	18.871
床位 X_b/mm	-1.622	-4.342
轮坯安装角 $\gamma/(\circ)$	40.201	9.75
2 阶变性系数 c	0	0.124
3 阶变性系数 d	0	0.132

采用传统算法^[1,12-13](即求解 5 个非线性方程组确定啮合点及传动误差)的 TCA 和 ETCA 分析结果如图 4 所示。图 4(a)为齿面接触印痕图,图 4(b)为传动误差曲线图(横坐标为小轮转角,单位为 $^\circ$;纵坐标为传动误差,单位为 $''$)。在啮合转换点处传动误差幅值为 $8.223''$ 。采用分解算法计算的齿面接触印痕图和为传动误差曲线图如图 5 所示,在啮合转换点处传动误差幅值为 $8.539''$ 。

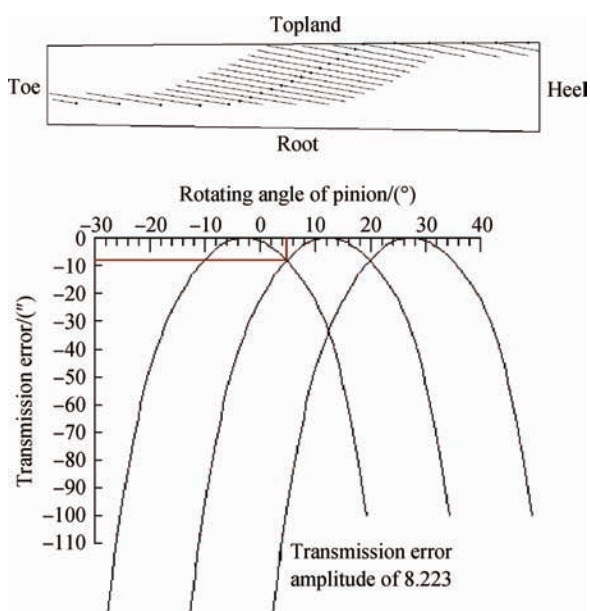


图4 传统方法的轮齿接触分析及边缘接触分析

Fig. 4 Conventional method of tooth contact analysis and edge contact analysis

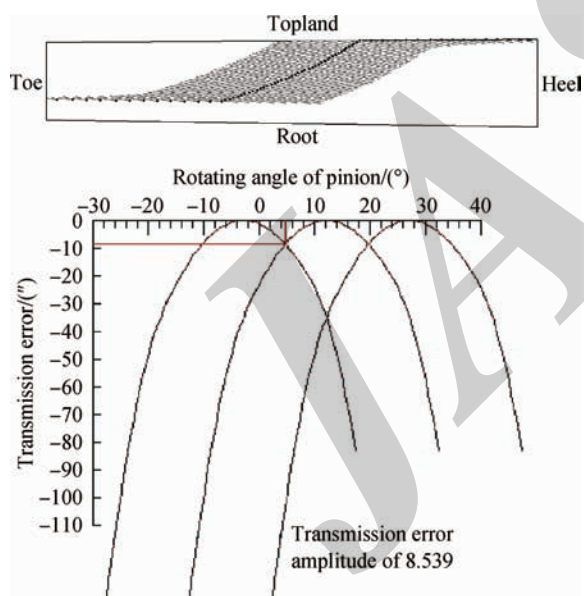


图5 分解法的边缘接触分析及边缘接触分析

Fig. 5 Decomposition method of tooth contact analysis and edge tooth contact analysis

对比两种算法的 TCA 分析结果可以看出: 齿面印痕是一致的, 在啮合转换点, 两种方法计算的传动误差幅值相差 $0.3''$ 。传统方法通过求解非线性方程组精确计算啮合点, 而分解算法是近似算法, 其精度与瞬时共轭啮合线离散密度有关。离散点的密度越高, 计算精度越高。

对比两种算法的 ETCA 分析结果可以看出: 传统方法在边缘接触部分分析得到的瞬时接触椭

圆长度基本不变, 而分解法计算值是逐渐减少。传统方法计算轮齿边缘瞬时接触线时, 搜索方向不明确, 根据给定搜索半径在齿面范围内搜索最小距离离散点对; 分解算法搜索方向明确, 即沿瞬时共轭啮合线搜索, 寻找瞬时接触椭圆端点。

4 结 论

1) 提出了瞬时共轭啮合线的概念, 将这一概念应用于啮合点、传动误差及瞬时接触线的分离与计算, 极大地简化了轮齿接触分析的计算。

2) 传统的轮齿接触分析法需要求解 5 个非线性方程的方程组确定啮合点, 计算精度较高, 但求解难度大。本文提出的轮齿接触分析分解算法是近似算法, 瞬时共轭啮合线离散点的密度越高, 计算精度越高。求解啮合点所需方程的个数减小到 2 个, 极大的降低了求解难度。

3) 传统的轮齿接触分析法将瞬时接触线简化为直线, 根据两齿面在啮合点的微观几何拓扑结构计算接触椭圆长轴方向搜索长轴两端点; 分解算法直接在瞬时共轭啮合线上搜索接触长轴两端点, 计算更简单。

4) 分解算法同样适用于边缘接触分析, 与传统的边缘接触分析法相比, 搜索方向明确, 计算更加简洁、高效。

5) 分别采用本文的分解算法和传统的轮齿接触分析法对一对弧齿锥齿轮进行了齿面接触和边缘接触分析, 对比两种方法的分析结果: 齿面部分印痕是一致的, 传动误差幅值相差 $0.3''$; 在边缘接触部分传动误差曲线和齿面印痕存在少许差异。

6) 本文以螺旋锥齿轮为例对轮齿接触分析的分解法进行论述, 其他类型的齿轮副可看作是其特例。

参考文献:

- [1] LITIVIN F L. Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gears[R]. NASA Contractor Report No. 4342, 1991.
- [2] FAN Qi, Enhanced algorithms of contact simulation for hypoid gear drives produced by face-milling and face-hobbing processes[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(1): 31-37.
- [3] FAN Qi. Optimization of face cone element for spiral bevel and hypoid gears[J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(9): 091002. 1-091002. 7.
- [4] 樊奇, 让·德福. 格里森专家制造系统(GEMS)开创弧齿锥齿轮及双曲面齿轮数字化制造新纪元[J]. 产品与技术,

2005,18(4):87-93.

FAN Qi,DAFOE Ron. Gleason expert manufacturing system(GEMS) opens a new area for digitized manufacturing of spiral bevel and hypoid gears[J]. Products and Technology,2005,18(4):87-93. (in Chinese)

[5] SHIH Y P. A novel ease-off flank modification methodology for spiral bevel and hypoid gears[J]. Mechanism and Machine Theory,2010,45(8):1108-1124.

[6] 曹雪梅,邓效忠,聂少武. 基于共轭齿面修正的航空弧齿锥齿轮高阶传动误差齿面拓扑结构设计[J]. 航空动力学报, 2015,30(1):195-200

CAO Xuemei, DENG Xiaozhong, NIE Shaowu. Ease-off flank topography design for aviation spiral bevel gears with higher-order transmission errors by modification of conjugate flank[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(1): 195-200. (in Chinese)

[7] 曹雪梅,邓效忠,耿龙龙. 弧齿锥齿轮齿面曲率干涉检验新方法 with 实验验证[J]. 航空动力学报, 2015, 30(2): 491-497.

CAO Xuemei, DENG Xiaozhong, GENG Longlong. An invariant approach for tooth surface curvature inference analysis of spiral bevel gears and experiment test[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(2): 491-497. (in Chinese)

[8] SHEVELEVA G I, VOLKOV A E, MEDVEDEV V I. Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(2):198-215.

[9] 汪中厚,李 刚,久保爱三. 基于数字化真实齿面的螺旋锥齿轮齿面接触分析[J]. 机械工程学报, 2014, 50(15): 1-11.

WANG Zhonghou, LI Gang, KUBO Aizoh. Tooth contact analysis of spiral bevel gears based on digital real tooth surfaces[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(15):1-11. (in Chinese)

[10] KOLIVAND M, KAHRAMAN A. A load distribution model for hypoid gears using ease-off topography and shell theory[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(5): 1848-1865.

[11] KOLIVAND M, KAHRAMAN A. An ease-off based method for loaded tooth contact analysis of hypoid gears having local and global surface deviations[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(6): 071004. 1-071004. 8.

[12] 高建平,方宗德,杨宏斌. 螺旋锥齿轮边缘接触分析[J]. 航空动力学报, 1998, 13(3): 289-292.

GAO Jianping, FANG Zongde, YANG Hongbin. Analysis of edge contact for hypoid gear and spiral bevel gears[J]. Journal of Aerospace Power, 1998, 13(3): 289-292. (in Chinese)

[13] 方宗德,邓效忠,任东锋. 考虑边缘接触的弧齿锥齿轮承载接触分析[J]. 机械工程学报, 2002, 38(9): 69-72.

FANG Zongde, DENG Xiaozhong, REN Dongfeng. Loaded tooth contact analysis of spiral bevel gears considering edge contacts [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(9): 69-72. (in Chinese)

[14] 曹雪梅,方宗德,张金良. 弧齿锥齿轮的齿面主动设计[J]. 机械工程学报, 2007, 43(8): 155-158.

CAO Xuemei, FANG Zongde, ZHANG Jinliang. Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(8): 155-158. (in Chinese)

[15] 曹雪梅,方宗德,许浩. 弧齿锥齿轮的齿面主动设计及试验验证[J]. 机械工程学报, 2008, 44(7): 209-214.

CAO Xuemei, FANG Zongde, XU Hao. Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears and experimental tests[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(7): 209-214. (in Chinese)

(编辑:王碧珩)